

## Лекция 5

# Численные методы решения линейных уравнений

## **Вопросы лекции**

1. Основные понятия в области систем линейных уравнений.
2. Прямые методы решения систем линейных уравнений.
3. Итерационные методы решения систем линейных уравнений.

## **Вопрос 1.**

**Основные понятия  
в области систем линейных  
уравнений**



Используя понятие матрицы  $A$ , систему уравнений (4.1) можно записать в векторно-матричном виде:

$$Ax = \mathbf{b}, \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{b}$  — вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец правых частей соответственно:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

или, в более компактной записи,

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

В ряде случаев получаются системы уравнений с некоторыми специальными видами матриц. Вот некоторые примеры таких матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь:

$A$  — симметрическая матрица (ее элементы расположены симметрично относительно главной диагонали ( $a_{ij} = a_{ji}$ ));

$B$  — верхняя треугольная матрица с равными нулю элементами, расположенными ниже диагонали;

$C$  — клеточная матрица (ее ненулевые элементы составляют отдельные группы (клетки));

$F$  — ленточная матрица (ее ненулевые элементы составляют «ленту», параллельную диагонали (в данном случае ленточная матрица  $F$  одновременно является также трехдиагональной));

$E$  — единичная матрица (частный случай диагональной);

$O$  — нулевая матрица.

*Определителем (детерминантом)* матрицы  $A$   $n$ -го порядка называется число  $D$ , равное

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega}. \quad (4.3)$$

Здесь индексы  $\alpha, \beta, \dots, \omega$  пробегает все возможные  $n!$  перестановок номеров  $1, 2, \dots, n$ ;  $k$  — число инверсий в данной перестановке <sup>1)</sup>.

Необходимым и достаточным условием существования единственного решения системы линейных уравнений является условие  $D \neq 0$ . В случае равенства нулю определителя системы матрица называется *вырожденной*; при этом система линейных уравнений (4.1) либо не имеет решения, либо имеет их бесконечное множество.

---

<sup>1)</sup> Под инверсией понимается обмен двух индексов местами; с помощью таких обменов перестановка  $\alpha, \beta, \dots, \omega$  получается из перестановки  $1, 2, \dots, n$ .

Все эти случаи легко проиллюстрировать геометрически для системы

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Каждое уравнение описывает прямую на плоскости; координаты точки пересечения указанных прямых являются решением системы (4.4).

Рассмотрим три возможных случая взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) прямые пересекаются, т. е. коэффициенты системы (4.4) не пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}; \tag{4.5}$$

2) прямые параллельны, т. е. коэффициенты системы (4.4) подчиняются условиям

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}; \tag{4.6}$$

3) прямые совпадают, т. е. все коэффициенты (4.4) пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{4.7}$$



Запишем определитель  $D$  системы (4.4) в виде

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что при выполнении условия (4.5)  $D \neq 0$ , и система (4.4) имеет единственное решение. В случаях отсутствия решения или при бесконечном множестве решений имеют место соответственно соотношения (4.6) или (4.7), из которых получаем  $D = 0$ .

На практике, особенно при вычислениях на компьютере, когда происходят округление или отбрасывание младших разрядов чисел, далеко не всегда удается получить точное равенство определителя нулю. При  $D \approx 0$  прямые могут оказаться почти параллельными (в случае системы двух уравнений); координаты точки пересечения этих прямых весьма чувствительны к изменению коэффициентов системы (см. рис. 4.1).

Таким образом, малые погрешности вычислений или исходных данных могут привести к существенным погрешностям в решении. Такие системы уравнений называются *плохо обусловленными*.

Заметим, что условие  $D \approx 0$  является необходимым для плохой обусловленности системы линейных уравнений, но не достаточным. Например, система уравнений  $n$ -го порядка с диагональной матрицей с элементами  $a_{ii} = 0.1$  не является плохо обусловленной, хотя ее определитель мал ( $D = 10^{-n}$ ). Строгий критерий плохой обусловленности системы линейных уравнений можно найти в более полных курсах по численным методам.

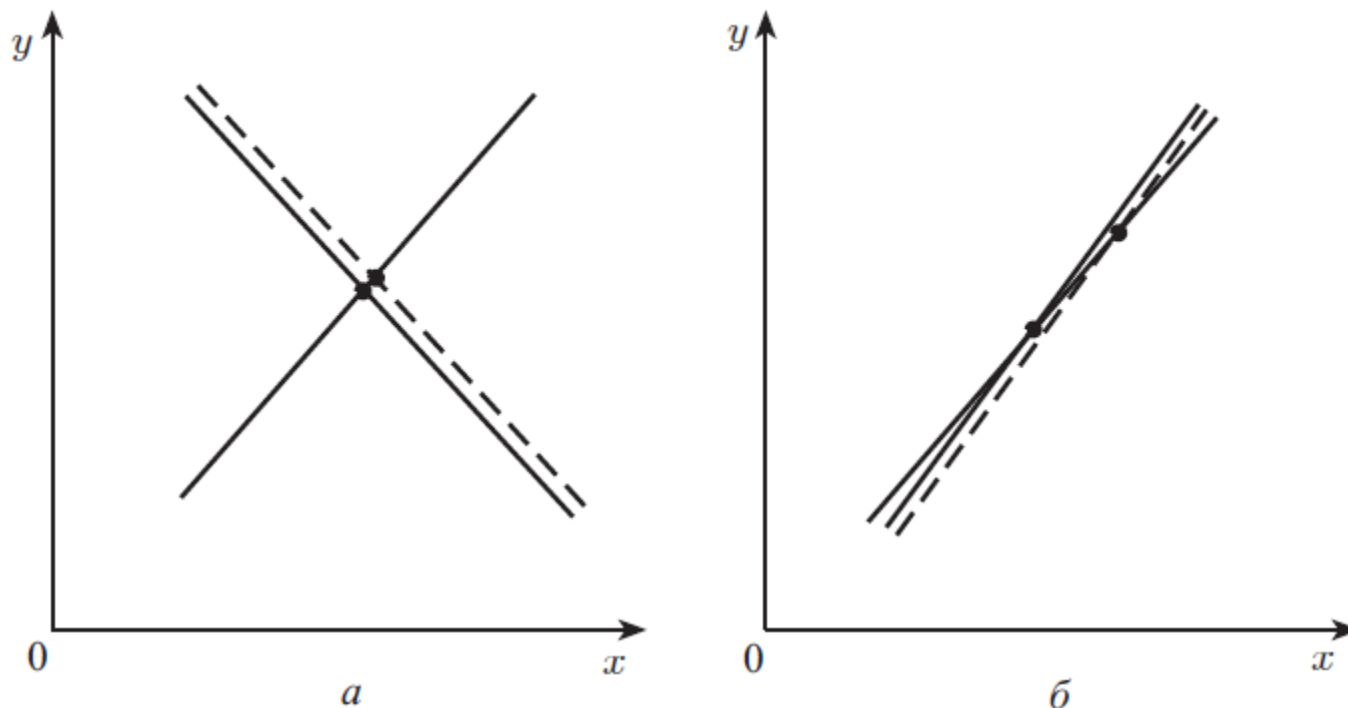


Рис. 4.1. Геометрическая иллюстрация системы двух уравнений: при малом изменении параметров одной из прямых координаты точки пересечения мало изменяются в случае  $a$  и заметно изменяются в случае  $b$

Приведенные соображения справедливы и для любого числа уравнений системы (4.1), хотя в случае  $n > 3$  нельзя привести простые геометрические иллюстрации. При  $n = 3$  каждое уравнение описывает плоскость в пространстве, и в случае почти параллельных плоскостей или линий их попарного пересечения получаем плохо обусловленную систему трех уравнений.

**2. О методах решения линейных систем.** Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы — прямые и итерационные. *Прямые методы* используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций. Эти методы сравнительно просты и наиболее универсальны, т. е. пригодны для решения широкого класса линейных систем.

Вместе с тем прямые методы имеют и ряд недостатков. Как правило, они требуют хранения в оперативной памяти компьютера сразу всей матрицы, и при больших значениях  $n$  расходуется много места в памяти. Далее, прямые методы обычно не учитывают структуру матрицы при большом числе нулевых элементов в разреженных матрицах (например, клеточных или ленточных) эти элементы занимают место в памяти машины, и над ними проводятся арифметические действия. Исключением здесь является метод прогонки.

Существенным недостатком прямых методов является также накапливание погрешностей в процессе решения, поскольку вычисления на любом этапе используют результаты предыдущих операций. Это особенно опасно для больших систем, когда резко возрастает общее число операций, а также для плохо обусловленных систем, весьма чувствительных к погрешностям. В связи с этим прямые методы используются обычно для не слишком больших ( $n \lesssim 1000$ ) систем с плотно заполненной матрицей и не близким к нулю определителем.

Отметим еще, что прямые методы решения линейных систем иногда называют *точными*, поскольку решение выражается в виде точных формул через коэффициенты системы. Однако точное решение может быть получено лишь при точном выполнении вычислений (и, разумеется, при точных значениях коэффициентов системы). На практике же при использовании компьютеров вычисления проводятся с погрешностями. Поэтому неизбежны погрешности и в окончательных результатах.

*Итерационные методы* — это методы последовательных приближений. В них необходимо задать некоторое приближенное решение — *начальное приближение*. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый *итерацией*. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с требуемой точностью. Алгоритмы решения линейных систем с использованием итерационных методов обычно более сложные по сравнению с прямыми методами. Объем вычислений заранее определить трудно.

Тем не менее итерационные методы в ряде случаев предпочтительнее. Они требуют хранения в памяти машины не всей матрицы системы, а лишь нескольких векторов с  $n$  компонентами. Иногда элементы матрицы можно совсем не хранить, а вычислять их по мере необходимости. Погрешности окончательных результатов при использовании итерационных методов не накапливаются, поскольку точность вычислений в каждой итерации определяется лишь результатами предыдущей итерации и практически не зависит от ранее выполненных вычислений. Эти достоинства итерационных методов делают их особенно полезными в случае большого числа уравнений, а также плохо обусловленных систем. Следует отметить, что при этом сходимость итераций может быть очень медленной; поэтому ищутся эффективные пути ее ускорения.

Итерационные методы могут использоваться для уточнения решений, полученных с помощью прямых методов. Такие смешанные алгоритмы обычно довольно эффективны, особенно для плохо обусловленных систем. В последнем случае могут также применяться методы регуляризации.

**3. Другие задачи линейной алгебры.** Кроме решения систем линейных уравнений существуют другие задачи линейной алгебры — вычисление определителя, обратной матрицы, собственных значений матрицы и др.

Легко вычисляются лишь определители невысоких порядков и некоторые специальные типы определителей. В частности, для определителей второго и третьего порядков соответственно имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, расположенных на главной диагонали:  $D = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ . Отсюда также следует, что определитель единичной матрицы равен единице, а нулевой — нулю:  $\det E = 1$ ,  $\det O = 0$ .

В общем случае вычисление определителя оказывается значительно более трудоемким. Определитель  $D$  порядка  $n$  имеет вид (4.3)

$$D = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega}.$$

Из этого выражения следует, что определитель равен сумме  $n!$  слагаемых, каждое из которых является произведением  $n$  элементов. Поэтому для вычисления определителя порядка  $n$  (без использования специальных приемов) требуется  $(n - 1)n!$  умножений и  $n! - 1$  сложений, т. е. общее число арифметических операций равно

$$N = n \cdot n! - 1 \approx n \cdot n!. \quad (4.8)$$



Оценим значения  $N$  в зависимости от порядка  $n$  определителя:

|     |    |                  |                   |
|-----|----|------------------|-------------------|
| $n$ | 3  | 10               | 20                |
| $N$ | 17 | $3.6 \cdot 10^7$ | $5 \cdot 10^{19}$ |

Можно подсчитать время вычисления таких определителей на компьютере с заданным быстродействием. Примем для определенности среднее быстродействие равным 10 млн. операций в секунду. Тогда для вычисления определителя 10-го порядка потребуется около 3.6 с, а при  $n = 20$  — свыше 150 тыс. лет.

Приведенные оценки указывают на необходимость разработки и использования экономичных численных методов, позволяющих эффективно проводить вычисления определителей.

Матрица  $A^{-1}$  называется *обратной* по отношению к квадратной матрице  $A$ , если их произведение равно единичной матрице:  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ . В линейной алгебре доказывается, что всякая невырожденная матрица  $A$  (т. е. с отличным от нуля определителем  $D$ ) имеет обратную. При этом

$$\det A^{-1} = 1/D.$$

Запишем исходную матрицу в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Минором* элемента  $a_{ij}$  называется определитель  $(n - 1)$ -го порядка, образованный из определителя матрицы  $A$  зачеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма  $i + j$  номеров строки  $i$  и столбца  $j$  четная, и со знаком минус, если эта сумма нечетная, т. е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Каждый элемент  $z_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) обратной матрицы  $Z = A^{-1}$  равен отношению алгебраического дополнения  $A_{ji}$  элемента  $a_{ji}$  (не  $a_{ij}$ ) исходной матрицы  $A$  к значению ее определителя  $D$ :

$$Z = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и выше, можно также подсчитать число операций, необходимое для вычисления обратной матрицы без использования специальных методов. Это число равно сумме числа операций, с помощью которых вычисляются  $n^2$  алгебраических дополнений, каждое из которых является определителем  $(n - 1)$ -го порядка, и  $n^2$  делений алгебраических дополнений на определитель  $D$ . Таким образом, общее число операций для вычислений обратной матрицы равно

$$N = [(n - 1) \cdot (n - 1)! - 1]n^2 + n^2 + n \cdot n! - 1 = n^2 \cdot n! - 1.$$

Как и для задачи вычисления определителя, полученное значение  $N$  указывает на необходимость применения эффективных методов обращения матриц.

Важной задачей линейной алгебры является также вычисление собственных значений матрицы.

Большое число научно-технических задач, а также некоторые исследования в области вычислительной математики требуют нахождения собственных значений и собственных векторов матриц. Введем некоторые определения, необходимые для изложения материала данного параграфа.

Рассмотрим, квадратную матрицу  $n$ -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Вектор  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  называется *собственным вектором* матрицы  $A$ , соответствующим *собственному значению*  $\lambda$ , если он удовлетворяет системе уравнений

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (4.34)$$

Поскольку при умножении собственного вектора на скаляр он остается собственным вектором той же матрицы, его можно нормировать. В частности, каждую координату собственного вектора можно разделить на максимальную из них или на длину вектора; в последнем случае получится единичный собственный вектор.

Характеристической матрицей  $C$  данной матрицы  $A$  называется матрица вида

$$C = A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

где  $E$  — единичная матрица. Легко видеть, что систему (4.34) можно записать в виде

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad C\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (4.36)$$

Если перейти к координатной форме записи вектора  $x$ , то с учетом (4.33) систему (4.36) можно записать в виде

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Система (4.36) или (4.37) является однородной системой  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Она имеет ненулевые решения лишь тогда, когда ее определитель равен нулю:  $\det C = 0$ , причем решение не единственно.

Определитель матрицы  $C$  является многочленом  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ :

$$\det C = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n,\tag{4.38}$$

называемым *характеристическим многочленом*. Корни этого многочлена являются собственными значениями матрицы  $A$ .

Для нахождения собственных векторов матрицы требуется решить систему линейных алгебраических уравнений, решение которой не единственно. Из линейной алгебры известно, что в этом случае структура общего решения системы имеет следующий вид: одно или несколько неизвестных, называемых *свободными*, могут принимать любые значения, а остальные неизвестные выражаются через свободные. Число свободных неизвестных равно числу уравнений системы, являющихся следствием остальных уравнений. На практике, если свободное неизвестное одно (что часто и бывает), его полагают равным некоторому числу, например единице. После этого остальные неизвестные (компоненты вектора) находятся однозначно из подсистемы линейно независимых уравнений, в которой отброшено уравнение, являющееся следствием остальных. Эта процедура не влияет на результат решения задачи, поскольку, как уже отмечалось, собственные векторы находятся с точностью до постоянного множителя.



Пример. Вычислить собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Найдем корни этого многочлена второй степени:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5.$$

Для нахождения собственных векторов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2$ , составим системы уравнений типа (4.36), (4.37) для каждого из них.

При  $\lambda_1 = 2$  получим

$$\begin{pmatrix} 3 - 2 & 1 \\ 2 & 4 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, в координатной форме,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Замечаем, что уравнения линейно зависимы. Поэтому оставляем лишь одно из них.

Из первого уравнения следует, что  $x_2 = -x_1$ . Неизвестное  $x_1$  можно считать свободным, полагаем  $x_1 = 1$ . Тогда  $x_2 = -1$ , и собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_1 = 2$ , имеет вид  $\mathbf{x}_1 = \{1, -1\}$  или  $\mathbf{x}_1 = e_1 - e_2$ , где  $e_1, e_2$  — единичные орты выбранной базисной системы.

Аналогично находим второй собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_2 = 5$ . Опуская комментарии, получаем

$$\begin{pmatrix} 3 - 5 & 1 \\ 2 & 4 - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $\mathbf{x}_2 = e_1 + 2e_2$ .

Вектор  $\mathbf{x}_1$  нормирован; нормируем также вектор  $\mathbf{x}_2$ , разделив его компоненты на наибольшую из них. Получим  $\mathbf{x}_2 = 0.5e_1 + e_2$ . Можно также привести векторы к единичной длине, разделив их компоненты на значения модулей векторов. В этом случае

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 - e_2), \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (e_1 + 2e_2).$$

Мы рассмотрели простейший пример вычисления собственных значений и собственных векторов для матрицы второго порядка. Нетрудно также провести подобное решение задачи для матрицы третьего порядка и для некоторых весьма специальных случаев.

В общем случае, особенно для матриц высокого порядка, задача о нахождении их собственных значений и собственных векторов, называемая *полной проблемой собственных значений*, значительно более сложная.

На первый взгляд может показаться, что вопрос сводится к вычислению корней многочлена (4.38). Однако здесь задача осложнена тем, что среди собственных значений часто встречаются кратные. И кроме того, для произвольной матрицы непросто вычислить сами коэффициенты характеристического многочлена.

## Вопрос 2

**Прямые методы решения систем  
линейных уравнений.**

**1. Вводные замечания.** Одним из способов решения системы линейных уравнений является *правило Крамера*, согласно которому каждое неизвестное представляется в виде отношения определителей. Запишем его для системы

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2.\end{aligned}$$

Тогда  $x = D_1/D, \quad y = D_2/D,$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Можно попытаться использовать это правило для решения систем уравнений произвольного порядка. Однако при большом числе уравнений потребуется выполнить огромное число арифметических операций, поскольку для вычислений  $n$  неизвестных необходимо найти значения определителей, число которых  $n + 1$ . Количество арифметических операций можно оценить с учетом формулы (4.8). При этом предполагаем, что определители вычисляются непосредственно — без использования экономичных методов. Тогда получим

$$N = (n + 1)(n \cdot n! - 1) + n.$$

Поэтому правило Крамера можно использовать лишь для решения систем, состоящих из нескольких уравнений.

Известен также метод решения линейной системы с использованием обратной матрицы. Система записывается в виде  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (см. (4.2)). Тогда, умножая обе части этого векторного уравнения слева на обратную матрицу  $A^{-1}$ , получаем  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . Однако если не использовать экономичных схем для вычисления обратной матрицы, этот способ также непригоден для практического решения линейных систем при больших значениях  $n$  из-за большого объема вычислений.

Наиболее распространенными среди прямых методов являются *метод исключения Гаусса* и его модификации.

**2. Метод Гаусса.** Он основан на приведении матрицы системы к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы. Сначала с помощью первого уравнения исключается  $x_1$  из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается  $x_2$  из третьего и всех последующих уравнений. Этот процесс, называемый *прямым ходом метода Гаусса*, продолжается до тех пор, пока в левой части последнего ( $n$ -го) уравнения не останется лишь один член с неизвестным  $x_n$ , т. е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

*Обратный ход метода Гаусса* состоит в последовательном вычислении искомого неизвестных: решая последнее уравнение, находим единственное в этом уравнении неизвестное  $x_n$ . Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляем  $x_{n-1}$  и т. д. Последним найдем  $x_1$  из первого уравнения.



Заметим, что описанные процедуры применимы лишь для систем с невырожденной матрицей. В противном случае (при условии, что вычисления проводятся точно) с помощью метода Гаусса можно ответить на вопрос, имеет ли система бесконечное множество решений или не имеет ни одного. Однако эти случаи мы в дальнейшем рассматривать не будем, предполагая, что матрица системы невырожденная.

Рассмотрим применение метода Гаусса для системы

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Для исключения  $x_1$  из второго уравнения прибавим к нему первое, умноженное на  $-a_{21}/a_{11}$ . Затем, умножив первое уравнение на  $-a_{31}/a_{11}$  и прибавив результат к третьему уравнению, также исключим из него  $x_1$ .

Получим равносильную (4.9) систему уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= b'_3; \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad i, j = 2, 3,$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1, \quad i = 2, 3.$$

Теперь из третьего уравнения системы (4.10) нужно исключить  $x_2$ . Для этого умножим второе уравнение на  $-a'_{32}/a'_{22}$  и прибавим результат к третьему. Получим

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2, \\a''_{33}x_3 &= b''_3;\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23}, \quad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2.$$

Матрица системы (4.11) имеет треугольный вид. На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса.

Заметим, что в процессе исключения неизвестных приходится выполнять операции деления на коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a'_{22}$  и т. д. Поэтому они должны быть отличны от нуля. В противном случае необходимо соответственным образом переставить уравнения системы. Перестановка уравнений должна быть предусмотрена в вычислительном алгоритме при его реализации на компьютере.

Обратный ход начинается с решения третьего уравнения системы (4.11):

$$x_3 = b_3''/a_3''.$$

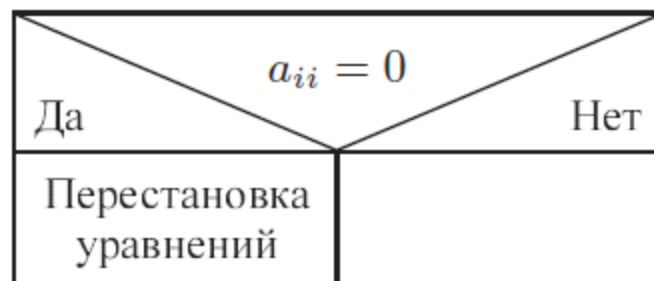
Используя это значение, можно найти  $x_2$  из второго уравнения, а затем  $x_1$  из первого:

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}'} (b_2' - a_{23}'x_3),$$
$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3).$$

Аналогично строится вычислительный алгоритм для линейной системы с произвольным числом уравнений.

Ввод  $n, \{a_{ij}\}, \{b_i\}$

для  $i$  от 1



для  $k$  от  $i + 1$

$$c = a_{ki}/a_{ii}, \quad a_{ki} = 0$$

для  $j$  от  $i + 1$

$$a_{kj} = a_{kj} - ca_{ij}$$

до  $n$

$$b_k = b_k - cb_i$$

до  $n$

до  $n - 1$

для  $i$  от  $n$

$$s = 0$$

для  $j$  от  $i + 1$

$$s = s + a_{ij}x_j$$

до  $n$

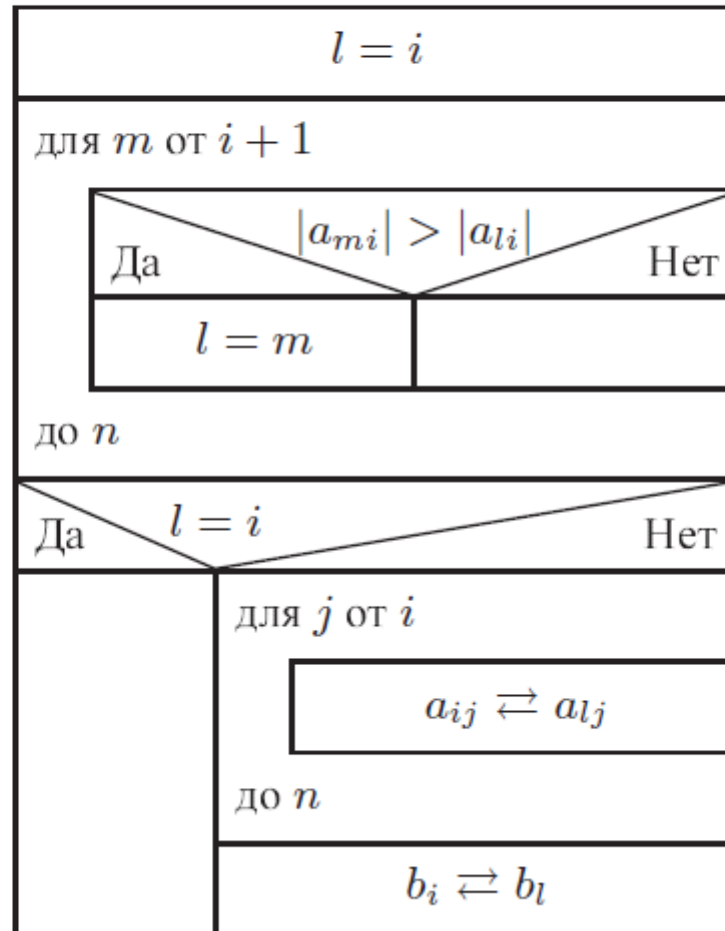
$$x_i = (b_i - s)/a_{ii}$$

до 1 с шагом  $-1$

Вывод  $\{x_i\}$

Одной из модификаций метода Гаусса является *схема с выбором главного элемента*. Она состоит в том, что требование неравенства нулю диагональных элементов  $a_{ii}$ , на которые происходит деление в процессе исключений, заменяется более жестким: из всех оставшихся в  $i$ -м столбце элементов нужно выбрать наибольший по модулю и переставить уравнения так, чтобы этот элемент оказался на месте элемента  $a_{ii}$ .

Алгоритм выбора главного элемента дополняет алгоритм метода Гаусса и используется при этом вместо условной конструкции, выполняющей перестановку уравнений в случае равенства нулю элемента  $a_{ii}$ .





Благодаря выбору наибольшего по модулю ведущего элемента уменьшаются множители, используемые для преобразования уравнений, что способствует снижению погрешностей вычислений. Поэтому метод Гаусса с выбором главного элемента обеспечивает приемлемую точность решения для не слишком большого числа ( $n \lesssim 1000$ ) уравнений.

И только для плохо обусловленных систем решения, полученные по этому методу, ненадежны.

Метод Гаусса целесообразно использовать для решения систем с плотно заполненной матрицей. Все элементы матрицы и правые части системы уравнений находятся в оперативной памяти машины. Объем вычислений определяется порядком системы  $n$ : число арифметических операций примерно равно  $(2/3)n^3$ .

Пример. Рассмотрим алгоритм решения линейной системы методом Гаусса и некоторые особенности этого метода для случая трех уравнений:

$$\begin{aligned}10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 4, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6.\end{aligned}$$

Исключим  $x_1$  из второго и третьего уравнений. Для этого сначала умножим первое уравнение на 0.3 и результат прибавим ко второму, а затем умножим первое же уравнение на  $-0.5$  и результат прибавим к третьему.

Получим

$$\begin{aligned}10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -0.1x_2 + 6x_3 &= 6.1, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5.\end{aligned}$$

Прежде чем исключать  $x_2$  из третьего уравнения, заметим, что коэффициент при  $x_2$  во втором уравнении (ведущий элемент) мал; поэтому было бы лучше переставить второе и третье уравнения. Однако мы проводим сейчас вычисления в рамках точной арифметики и погрешности округлений не опасны, поэтому продолжим исключение. Умножим второе уравнение на 25 и результат сложим с третьим уравнением. Получим систему в треугольном виде:

$$\begin{aligned}10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -0.1x_2 + 6x_3 &= 6.1, \\ 155x_3 &= 155.\end{aligned}$$

На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса.

Обратный ход состоит в последовательном вычислении  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_1$  соответственно из третьего, второго, первого уравнений. Проведем эти вычисления:

$$x_3 = \frac{155}{155} = 1, \quad x_2 = \frac{6x_3 - 6.1}{0.1} = -1, \quad x_1 = \frac{7x_2 + 7}{10} = 0.$$

Подстановкой в исходную систему легко убедиться, что  $(0, -1, 1)$  и есть ее решение.

Изменим теперь слегка коэффициенты системы таким образом, чтобы сохранить прежним решение и вместе с тем при вычислениях использовать округления. Таким условиям, в частности, соответствует система

$$\begin{aligned}10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -3x_1 + 2.099x_2 + 6x_3 &= 3.901, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6.\end{aligned}$$

Здесь изменены коэффициент при  $x_2$  и правая часть второго уравнения. Будем снова вести процесс исключения, причем вычисления проведем в рамках арифметики с плавающей точкой, сохраняя пять разрядов числа. После первого шага исключения получим

$$\begin{aligned}10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ -0.001x_2 + 6x_3 &= 6.001, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5.\end{aligned}$$

Следующий шаг исключения проводим при малом ведущем элементе ( $-0.001$ ). Чтобы исключить  $x_2$  из третьего уравнения, мы вынуждены умножить второе уравнение на 2500. При умножении 6.001 на 2500 получаем число 15 002.5, которое при округлении до пяти разрядов дает 15 003.

При прибавлении к этому числу 2.5 получается число 15 005.5, которое округляется до 15 006. В результате получаем третье уравнение в виде

$$15\,005x_3 = 15\,006.$$

Отсюда  $x_3 = 15006/15005 = 1.0001$ . Из второго и первого уравнений найдем

$$x_2 = \frac{6.001 - 6 \cdot 1.0001}{-0.001} = -0.4, \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-0.4)}{10} = 0.42.$$

Вычисления проводились с округлением до пяти разрядов по аналогии с процессом вычислений на компьютере. В результате этого было получено решение  $(0.42, -0.4, 1.0001)$  вместо  $(0, -1, 1)$ .

Такая большая неточность результатов объясняется малой величиной ведущего элемента. В подтверждение этому до исключения  $x_2$  из третьего уравнения переставим уравнения системы:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 &= 7, \\ 2.5x_2 + 5x_3 &= 2.5, \\ -0.001x_2 + 6x_3 &= 6.001. \end{aligned}$$

Исключим теперь  $x_2$  из третьего (бывшего второго) уравнения, прибавив к нему второе, умноженное на 0.0004 (ведущий элемент здесь равен 2.5).

Третье уравнение примет вид

$$6.002x_3 = 6.002.$$

Отсюда находим  $x_3 = 1$ . С помощью второго и первого уравнений вычислим  $x_2, x_1$ :

$$x_2 = \frac{2.5 - 5 \cdot 1}{2.5} = -1, \quad x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1)}{10} = 0.$$

Таким образом, в результате перестановки уравнений, т. е. выбора наибольшего по модулю из оставшихся в данном столбце элементов, погрешность решения в рамках данной точности исчезла.

Рассмотрим подробнее вопрос о погрешностях решения систем линейных уравнений методом Гаусса. Запишем систему в матричном виде:  $Ax = b$ . Решение этой системы можно представить в виде  $x = A^{-1}b$ . Однако вычисленное по методу Гаусса решение  $x_*$  отличается от этого решения из-за погрешностей округлений, связанных с ограниченностью разрядной сетки машины.

Существуют две величины, характеризующие степень отклонения полученного решения от точного. Одна из них — *погрешность*  $\Delta x$ , равная разности этих значений; другая — *невязка*  $r$ , равная разности между левой и правой частями уравнений при подстановке в них решения:

$$\Delta x = x - x_*, \quad r = Ax_* - b.$$



Можно показать, что если одна из этих величин равна нулю, то и другая должна равняться нулю. Однако из малости одной не следует малость другой. При  $\Delta x \approx 0$  обычно  $r \approx 0$ , но обратное утверждение справедливо не всегда. В частности, для плохо обусловленных систем при  $r \approx 0$  погрешность решения может быть большой.

Вместе с тем в практических расчетах, если система не является плохо обусловленной, контроль точности решения осуществляется с помощью невязки (погрешность же обычно вычислить невозможно, поскольку неизвестно точное решение). Можно отметить, что метод Гаусса с выбором главного элемента в этих случаях дает малые невязки.

Понятия погрешности и невязки используются при численном решении не только систем линейных уравнений, но и других задач. В зависимости от задачи погрешность и невязка могут быть величинами скалярными, векторными (как в данном случае), матричными и др.

**3. Определитель и обратная матрица.** Ранее уже отмечалось, что непосредственное нахождение определителя требует большого объема вычислений. Вместе с тем легко вычисляется определитель треугольной матрицы: он равен произведению ее диагональных элементов.

Для приведения матрицы к треугольному виду может быть использован *метод исключения*, т. е. прямой ход метода Гаусса. В процессе исключения элементов величина определителя не меняется. Знак определителя меняется на противоположный при перестановке его столбцов или строк. Следовательно, значение определителя после приведения матрицы  $A$  к треугольному виду вычисляется по формуле

$$\det A = (-1)^k \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Здесь диагональные элементы  $a_{ii}$  берутся из преобразованной (а не исходной) матрицы. Через  $k$  обозначено число перестановок строк (или столбцов) матрицы при ее приведении к треугольному виду (для получения ненулевого или максимального по модулю ведущего элемента на каждом этапе исключения). Благодаря методу исключения можно вычислять определители 1000-го и большего порядков, и объем вычислений значительно меньший, чем в проведенных ранее оценках.

Теперь найдем обратную матрицу  $A^{-1}$ . Обозначим ее элементы через  $z_{ij}$ . Запишем равенство  $AA^{-1} = E$  в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$Az_j = e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.12)$$

где  $z_j$  и  $e_j$  —  $j$ -е столбцы матриц  $A^{-1}$  и  $E$  соответственно <sup>1)</sup>. Таким образом, для нахождения  $j$ -го столбца обратной матрицы нужно решить систему уравнений (4.12). Решив  $n$  таких систем для  $j = 1, 2, \dots, n$ , мы найдем все столбцы  $z_j$  и, следовательно, саму обратную матрицу.

---

<sup>1)</sup> Заметим, что в столбце  $e_j$  равны нулю все компоненты, кроме  $j$ -й, которая равна единице.

**4. Метод прогонки.** Он является модификацией метода Гаусса для частного случая разреженных систем — системы уравнений с *трехдиагональной матрицей*. Такие системы получаются при моделировании некоторых инженерных задач, а также при численном решении краевых задач для дифференциальных уравнений.

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} b_1x_1 + c_1x_2 &= d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2, \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 &= d_3, \\ \dots & \dots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n &= d_{n-1}, \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n &= d_n. \end{aligned} \tag{4.13}$$

На главной диагонали матрицы этой системы стоят элементы  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , над ней — элементы  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ , под ней — элементы  $a_2, a_3, \dots, a_n$  (при этом обычно все коэффициенты  $b_i$  не равны нулю). Остальные элементы матрицы равны нулю.

*Метод прогонки* состоит из двух этапов — *прямой прогонки* (аналога прямого хода метода Гаусса) и *обратной прогонки* (аналога обратного хода метода Гаусса). Прямая прогонка состоит в вычислении прогоночных коэффициентов  $A_i, B_i$ , с помощью которых каждое неизвестное  $x_i$  выражается через  $x_{i+1}$ :

---

**5. О других прямых методах.** Среди прямых методов наиболее распространен метод Гаусса; он удобен для вычислений на компьютере.

Перечислим некоторые другие методы.

*Схема Жордана* при выборе главного элемента не учитывает коэффициенты тех уравнений, из которых уже выбирался главный элемент. Она не имеет преимуществ по сравнению с методом Гаусса. Отметим лишь, что здесь облегчается обратный ход, поскольку система приводится к диагональному виду (а не к треугольному). Эта схема часто используется для нахождения обратной матрицы.

*Метод квадратного корня* используется в тех случаях, когда матрица системы является симметричной.

*Метод оптимального исключения* удобен при построчном вводе матрицы системы в оперативную память. Однако построчный ввод имеет и недостатки: частые обращения к внешним устройствам, невозможность выбора главного элемента и др.

*Клеточные методы* могут использоваться для решения больших систем, когда матрица и вектор правых частей целиком не помещаются в оперативной памяти.

Эти и другие методы решения систем линейных уравнений подробно описаны в более полных пособиях по численным методам, а также в специальной литературе по линейной алгебре.

## **Вопрос 3**

**Итерационные методы решения систем  
линейных уравнений**

- 1 Уточнение решения (124).
- 2 Метод простой итерации (126).
- 3 Метод Гаусса– Зейделя (127).

**1. Уточнение решения.** Решения, получаемые с помощью прямых методов, обычно содержат погрешности, вызванные округлениями при выполнении операций над числами с плавающей точкой на компьютере с ограниченным числом разрядов. В ряде случаев эти погрешности могут быть значительными, и необходимо найти способ их уменьшения. Рассмотрим здесь один из методов, позволяющий уточнить решение, полученное с помощью прямого метода.

Найдем решение системы линейных уравнений

$$Ax = b. \quad (4.17)$$

Пусть с помощью некоторого прямого метода вычислено приближенное решение  $x^{(0)}$  (т. е. приближенные значения неизвестных  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ ), называемое *начальным* или *нулевым приближением* к решению. Подставляя это решение в левую часть системы (4.17), получаем некоторый столбец правых частей  $b^{(0)}$ , отличный от  $b$ :

$$Ax^{(0)} = b^{(0)}. \quad (4.18)$$



Введем обозначения:  $\Delta \mathbf{x}^{(0)}$  — погрешность полученного решения,  $\mathbf{r}^{(0)}$  — невязка, т. е.

$$\Delta \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}, \quad \mathbf{r}^{(0)} = A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b} = \mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{b}. \quad (4.19)$$

Вычитая равенство (4.18) из равенства (4.17), с учетом обозначений (4.19) получаем

$$A\Delta \mathbf{x}^{(0)} = -\mathbf{r}^{(0)}. \quad (4.20)$$

Решая эту систему, находим значение погрешности  $\Delta \mathbf{x}^{(0)}$ , которое используем в качестве поправки к приближенному решению  $\mathbf{x}^{(0)}$ , вычисляя таким образом новое приближенное решение  $\mathbf{x}^{(1)}$  (или *следующее приближение* к решению):

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(0)}.$$

Таким же способом можно найти новую поправку к решению  $\Delta \mathbf{x}^{(1)}$  и следующее приближение  $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \Delta \mathbf{x}^{(1)}$  и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока очередное значение погрешности (поправки)  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  не станет достаточно малым, т. е. пока очередные приближенные значения неизвестных  $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$  не будут мало отличаться от предыдущих значений  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ .

Рассмотренный процесс уточнения решения представляет собой фактически итерационный метод решения системы линейных уравнений. При этом заметим, что для нахождения очередного приближения, т. е. на каждой итерации, решаются системы уравнений вида (4.20) с одной и той же матрицей, являющейся матрицей исходной системы (4.17), при разных правых частях. Это позволяет строить экономичные алгоритмы. Например, при использовании метода Гаусса сокращается объем вычислений на этапе прямого хода.

**2. Метод простой итерации.** Этот метод широко используется для численного решения уравнений и их систем различных видов. Рассмотрим применение метода простой итерации к решению систем линейных уравнений.

Запишем исходную систему уравнений в векторно-матричном виде (4.2) и выполним ряд тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} Ax &= \mathbf{b}; & \mathbf{0} &= \mathbf{b} - Ax; & \mathbf{x} &= \mathbf{b} - Ax + \mathbf{x}; \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{b} - Ax)\tau + \mathbf{x}; & \mathbf{x} &= (E - \tau A)\mathbf{x} + \tau \mathbf{b}; \\ & & \mathbf{x} &= B\mathbf{x} + \tau \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

где  $\tau \neq 0$  — некоторое число,  $E$  — единичная матрица,  $B = E - \tau A$ . Получившаяся система (4.25) эквивалентна исходной системе и служит основой для построения метода простой итерации.

Выберем некоторое начальное приближение  $\mathbf{x}^{(0)}$  и подставим его в правую часть системы (4.25):

$$\mathbf{x}^{(1)} = B\mathbf{x}^{(0)} + \tau\mathbf{b}.$$

Поскольку  $\mathbf{x}^{(0)}$  не является решением системы, в левой части (4.25) получится некоторый столбец  $\mathbf{x}^{(1)}$ , в общем случае отличный от  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Полученный столбец  $\mathbf{x}^{(1)}$  будем рассматривать в качестве следующего (первого) приближения к решению. Аналогично, по известному  $k$ -му приближению можно найти  $(k+1)$ -е приближение:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \tau\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Формула (4.26) и выражает собой метод простой итерации. Для ее применения нужно задать неопределенный пока параметр  $\tau$ . От значения  $\tau$  зависит, будет ли сходиться метод.

*Теорема. Пусть  $\det A \neq 0$ . Метод простой итераций (4.26) сходится тогда и только тогда, когда все собственные числа<sup>1)</sup> матрицы  $B = A - \tau E$  по модулю меньше единицы.*

Для некоторых типов матрицы  $A$  можно указать правило выбора  $\tau$ , обеспечивающее сходимость метода и оптимальную скорость сходимости. В простейшем же случае  $\tau$  можно положить равным некоторому постоянному числу, например, 1, 0.1 и т. д.

**3. Метод Гаусса–Зейделя.** Одним из самых распространенных итерационных методов, отличающийся простотой и легкостью программирования, является *метод Гаусса–Зейделя*.

Проиллюстрируем сначала этот метод на примере решения системы

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Предположим, что диагональные элементы  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  отличны от нуля (в противном случае можно переставить уравнения). Выразим неизвестные  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно из первого, второго и третьего уравнений системы (4.27):

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3),\tag{4.28}$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3),\tag{4.29}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2).\tag{4.30}$$

Зададим некоторые начальные (нулевые) приближения значений неизвестных:  $x_1 = x_1^{(0)}$ ,  $x_2 = x_2^{(0)}$ ,  $x_3 = x_3^{(0)}$ . Подставляя эти значения в правую часть выражения (4.28), получаем новое (первое) приближение для  $x_1$ :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}).$$

Используя это значение для  $x_1$  и приближение  $x_3^{(0)}$  для  $x_3$ , находим из (4.29) первое приближение для  $x_2$ :

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}).$$

И наконец, используя вычисленные значения  $x_1 = x_1^{(1)}$ ,  $x_2 = x_2^{(1)}$ , находим с помощью выражения (4.30) первое приближение для  $x_3$ :

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}).$$

На этом заканчивается первая итерация решения системы (4.28) – (4.30). Используя теперь значения  $x_1^{(1)}$ ,  $x_2^{(1)}$ ,  $x_3^{(1)}$ , можно таким же способом провести вторую итерацию, в результате которой будут найдены вторые приближения к решению:  $x_1 = x_1^{(2)}$ ,  $x_2 = x_2^{(2)}$ ,  $x_3 = x_3^{(2)}$  и т. д.



Приближение с номером  $k$  можно вычислить, зная приближение с номером  $k - 1$ , как

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}),$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}),$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}).$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения  $x_1^{(k)}$ ,  $x_2^{(k)}$ ,  $x_3^{(k)}$  не станут близкими с заданной погрешностью к значениям  $x_1^{(k-1)}$ ,  $x_2^{(k-1)}$ ,  $x_3^{(k-1)}$ .

Пример. Решить с помощью метода Гаусса–Зейделя следующую систему уравнений:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$

$$2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7,$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0.$$

Легко проверить, что решение данной системы следующее:  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ .

Решение. Выразим неизвестные  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно из первого, второго и третьего уравнений:

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{6}(7 - 2x_1 + x_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2).$$



В качестве начального приближения (как это обычно делается) примем  $x_1^{(0)} = 0$ ,  $x_2^{(0)} = 0$ ,  $x_3^{(0)} = 0$ . Найдем новые приближения неизвестных:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1, \quad x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(7 - 2 \cdot 1 + 0) = \frac{5}{6},$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cdot \frac{5}{6} \right) = \frac{8}{9}.$$

Аналогично вычислим следующие приближения:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4} \left( 4 + \frac{5}{6} - \frac{8}{9} \right) = \frac{71}{72}, \quad x_2^{(2)} = \frac{1}{6} \left( 7 - 2 \cdot \frac{71}{72} + \frac{8}{9} \right) = \frac{71}{72},$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{3} \left( \frac{71}{72} + 2 \cdot \frac{71}{72} \right) = \frac{71}{72}.$$

Итерационный процесс можно продолжать до получения малой разности между значениями неизвестных в двух последовательных итерациях.

Рассмотрим теперь систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Запишем ее в виде

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь также будем, предполагать, что все диагональные элементы отличны от нуля. Тогда в соответствии с методом Гаусса–Зейделя  $k$ -е приближение к решению можно представить в виде

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \dots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - \right. \\ \left. - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \dots - a_{in}x_n^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.31)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока все значения  $x_i^{(k)}$  не станут близкими к  $x_i^{(k-1)}$ .

Для сходимости итерационного процесса (4.31) достаточно, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы были не меньше сумм модулей всех остальных коэффициентов (преобладание диагональных элементов):

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.32)$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго. Эти условия являются достаточными для сходимости метода, но они не являются необходимыми, т. е. для некоторых систем итерации сходятся и при нарушении условий (4.32).

**Конец лекции**